Lo sguardo matematico

Claudio Bartocci
8 Luglio 2013

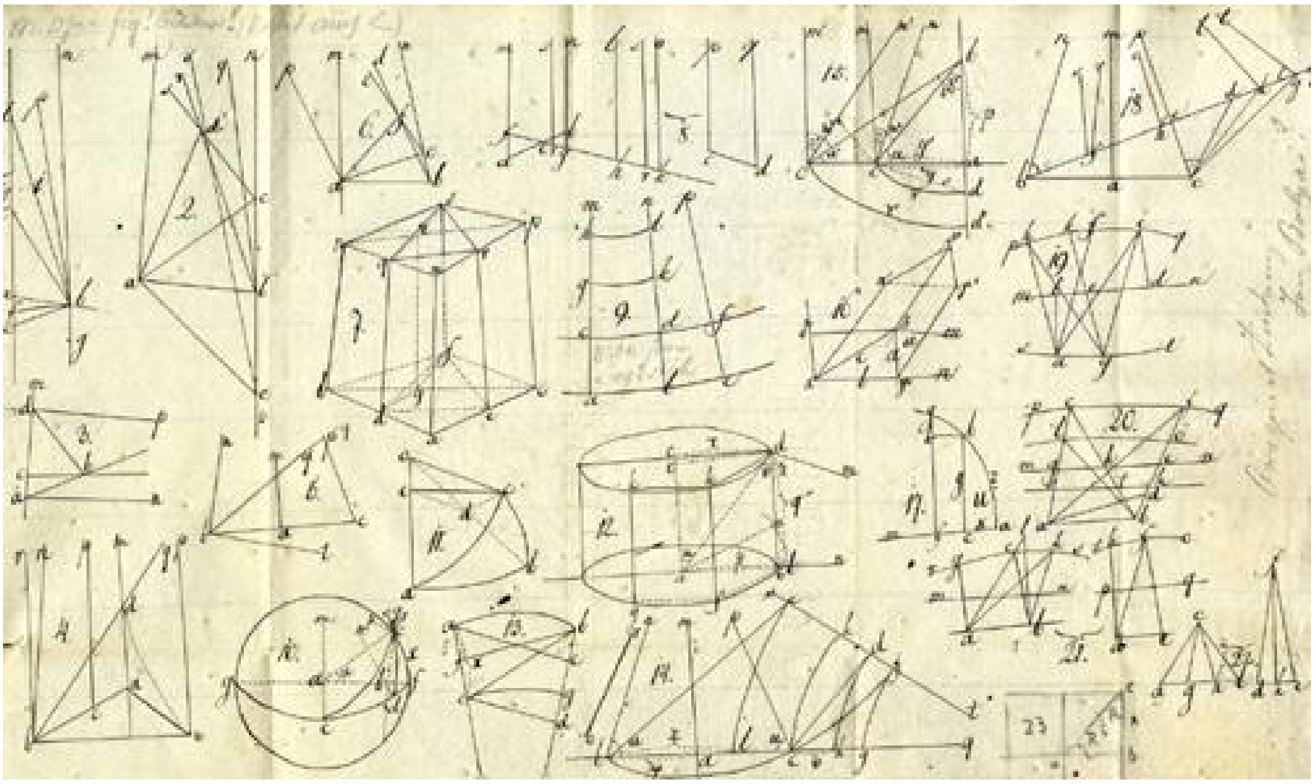
La matematica è scienza del visibile o dell'invisibile? La matematica dimostra con metodo e rigore fatti che già si sono resi manifesti, oppure porta alla luce verità che altrimenti rimarrebbero nascoste? È una colossale tautologia o una titanica opera di decifrazione?
Narra Plutarco che Archimede fu trucidato dalla soldataglia romana mentre era intento a tracciare figure geometriche sulla sabbia. La realtà storica fu probabilmente diversa, ma l'aneddoto ha il pregio di mettere in evidenza il carattere eminentemente geometrico della matematica greca classica: la maggior parte dei risultati e dei problemi sono formulati ricorrendo a *opportune* costruzioni. Basti pensare alle proprietà dei numeri figurati studiate dalla scuola pitagorica, all'enunciato del teorema di Pitagora, o ai problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo.

Negli *Elementi* di Euclide – mediante un procedimento deduttivo che in una qualche misura è un raffinamento di quell'arte maieutica di cui Socrate fa sfoggio nel *Menone* – i teoremi sono ricavati dai postulati (*aitémata*) e dalle «nozioni comuni» (*koinaì énnoiai*) attraverso una catena di sillogismi e di costruzioni geometriche elementari. Malgrado le apparenti similarità, il metodo euclideo è tuttavia radicalmente diverso dall'impostazione formalistica che, nel XX secolo, sarà propugnata da Hilbert e da Nicolas Bourbaki: i postulati di Euclide, infatti, non sono *assiomi* sprovvisti di qualsiasi valenza semantica, ma corrispondono a ben precisi «fatti geometrici», che non vengono posti in discussione in quanto perfettamente *visibili*. Basta una riga per *vedere* che è possibile condurre una retta da un qualsiasi punto (*semeîon*, cioè «segno») ad ogni altro punto; basta un compasso per *vedere* che, assegnato un punto nel piano,esiste una e una sola circonferenza di raggio dato avente quel punto come centro. Si potrebbe dire che le dimostrazioni euclidee sono un modo per rendere visibile ciò che altrimenti rimarrebbe celato al nostro sguardo. Ad esempio, come riuscire a vedere, se non attraverso una dimostrazione, che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto? (e a chiunque si ricordi almeno un po' della geometria studiata sui banchi di scuola sarà infatti sufficiente una singola, semplice immagine per sintetizzare nella memoria questa dimostrazione). Se è vero che «la natura ama nascondersi», il metodo euclideo è un disvelamento, un procedimento per giungere alla verità in quanto *alétheia*.

Ciò nonostante – o piuttosto, proprio per questo motivo – il risultato cui si perviene al termine di una dimostrazione, o di una catena di dimostrazioni, potrà non essere visibile in maniera diretta e immediata: sarà soltanto evidente. Con un riferimento (filologicamente azzardato) alla scuola pitagorica, potremmo dire che i postulati e le nozioni comuni si situano al livello della conoscenza *essoterica*, mentre i teoremi appartengono alla sfera del sapere *esoterico*. La non trascurabile differenza è che, mentre Ippaso di Metaponto, come vuole la leggenda, venne gettato in mare dai suoi condiscepoli per avere divulgato il segreto della incommensurabilità tra lato e diagonale del quadrato, gli *Elementi* nascono per essere letti e studiati da tutti – e forse nessun libro nella storia della nostra civiltà è stato studiato e letto di più.

D'altra parte, il rigore euclideo impone che anche le più ovvie costruzioni geometriche – per esempio inscrivere un quadrato in una circonferenza data – debbano essere rese *evidenti*, cioè dedotte dai postulati iniziali e dalle proposizioni precedentemente dimostrate. Una volta avviata, la macchina dimostrativa tende a procedere, per così dire, a occhi chiusi, senza fare alcuna distinzione tra verità che una figura tracciata sulla sabbia basta a rendere visibili al di là di ogni ragionevole dubbio e verità ben più occulte ed elusive. Euclide scava così un solco, instaura una tensione destinata a perdurare nei secoli tra ciò che è evidente e ciò che è visibile. In conseguenza di questo scarto epistemologico, diviene naturale domandarsi, non foss'altro che per ridurre il numero dei postulati, se anche questi ultimi non si possano in qualche modo *dimostrare*.

L'esempio fondamentale a questo proposito è costituito dal quinto postulato di Euclide, quello detto «delle parallele», che così recita: «se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minore di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti». I tentativi di dimostrare questo postulato – tredici secoli di ardite elucubrazioni geometriche, da Proclo a Saccheri e Lambert – sfoceranno nell'invenzione delle geometrie non euclidee, nella prima metà del XIX secolo, da parte di Gauss, Bolyai, Loba?evskij. Appena pochi decenni più tardi, Bernhard Riemann, nella sua lezione di abilitazione del 1854 –intitolata *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria*) e pubblicata postuma nel 1868 – rivoluziona il concetto stesso di spazio, gettando le fondamenta della geometria moderna e delineando un formidabile programma di ricerca, nel quale matematica, fisica e filosofia si fondono in un unico quadro concettuale coerente.



Janos Bolyai

L'incantesimo millenario della geometria delle figure tracciate sulla sabbia o sulle tavolette di cera è così definitivamente infranto, e con esso la fiducia nella *visibilità* di ciò che è dimostrabile. Se le relazioni tra matematica, esperienza sensibile e intuizione sono così ingarbugliate, conviene allora affidarsi alla pura logica disincarnata per sfuggire alle illusioni ottiche, ai miraggi che ingannano l'occhio della mente? Questa è la soluzione proposta da David Hilbert nelle sue *Grundlagen der Geometrie* (1899), contro la quale si leva la voce (tanto autorevole, quanto isolata) di Henri Poincaré: «la logica non basta, la scienza della dimostrazione non è la scienza tutta intera e l'intuizione deve conservare il suo ufficio come complemento, e vorrei dire come contrappeso o come antidoto della logica».

Per Poincaré, che manipola con destrezza da prestigiatore poliedri nello spazio quadridimensionale e usa la sua strabiliante capacità di immaginazione visiva per fondare la moderna dinamica topologica, la geometria diventa «l'arte di ragionare bene su figure disegnate male» e la matematica – che concentra la propria forza creativa non sugli oggetti, ma sulle relazioni tra gli oggetti – un intreccio di relazioni che si ridefiniscono le une con le altre, una rete di analogie tra analogie suscettibile di essere esplorata come un territorio in perenne mutamento.

Il matematico – nel suo lavoro paziente che coniuga lo stupore della scoperta alla vertigine dell'invenzione – appare non tanto come un implacabile raziocinatore, quanto piuttosto come un viaggiatore dell'immaginazione, forse addirittura un *flâneur* che cede, irresistibilmente, alle lusinghe descritte da Proust: «all'improvviso un tetto, un riflesso di sole su una pietra, l'odore d'una strada mi facevano sostare per uno speciale piacere che ne traevo e anche perché sembravano nascondere, dietro ciò che vedevo, qualcosa che mi invitavano ad andare a prendere e che io, malgrado i miei sforzi, non riuscivo a scoprire».

NOTA. Questo testo riprende in parte il mio breve saggio *L'ombra negata. Dimostrazioni e matematiche e immaginazione visiva*, in B. D'Amore (a cura di), *Matematica, stupore e poesia*, Giunti, Firenze 2009, pp. 102-115. Per i riferimenti alla tradizione greca – da Pitagora a Euclide – è imprescindibile Euclide, *Tutte le opere*, introduzione e cura di F. Acerbi, Bompiani, Milano 2007; per una panoramica sulla geometria dell'Ottocento rimando al mio *Una piramide di problemi. Storie di geometria da Gauss a Hilbert*, Raffaello Cortina, Milano 2012. Vorrei ringraziare Giulio Giorello, insieme al quale ho curato una scelta dei saggi del matematico britannico William Clifford (*Etica, scienza e fede*, Bollati Boringhieri, Torino 2013), nella quale si discutono alcune conseguenze filosofiche della concezione di Riemann.

Il testo è stato letto durante la Milanesiana 2013